Argeland.		Argeland.		Argeland.	
23278	S. 768, 1561.	25712	S. 2067.		1389, 1390b,
23957	S. 2606.	25738	S. 2068.		1703a,1703b,
*24029	S. 837.	25816	S. 2746 a.		1704 b.
*24562	S. 1564.	*25835	S. 846.	*26032	S. 2747.
*24631	S. 1722.	*25884	S. 2746 b.	26216	S. 2135.
25244	S. 822, 1623.	25893	Dorp. 206. S.	26299	S. 2136, 2748.
25250	S. 823, 1624.		1238, 1242,	26325	S. 2137.
25610	S. 2066.		1253, 1260,	26335	S. 2749.
25628	S. 1893.		1282, 1339,		
25663	S. 1894.		1345, 1349,		

In dem früheren Nachweise ist noch hinzuzufügen:

Argel. N°· 275 ist auch R. 2, 68. Der letztere aber fehlerhaft.
Argel. „ 2258 ist auch L. 3671. G. 437. P. 224. Br. 269.
Die Declination ist im Katalog 1^0 zu klein angesetzt.
Argel. N°· 15081 ist auch H. C. 101.
Bei Argel. N°· 21268 ist R. 6677 zu streichen.

Die Anzahl der Sterne, welche gemeinschaftlich von Lalande und Argelander beobachtet sind, sonst aber nicht weiter vorkommen, ist nach einer einmaligen Zählung = 1707 gefunden.

Über Herrn Dr. Heger's Abhandlung: die Auflösung von algebraischen Buchstabengleichungen betreffend [1]*.*

Von dem w. M., **Prof. Jos. Petzval.**

(Aus der Sitzung vom 20. Juli 1854.)

Die vorliegende Abhandlung hat zwei Probleme zum Gegenstande, nämlich:

Erstens: Die Auflösung einer Gleichung, welche nebst der Unbekannten x noch eine andere Buchstabengrösse a in sich schliesst.

Zweitens: die Auflösung eines Systems von zwei Gleichungen, in denen zwei Unbekannte x und y und überdies noch eine dritte Buchstabengrösse a erscheinen.

Bei dem zuerst erwähnten Probleme ist eine Gleichung:

$$F(x, a) = 0$$

als gegeben vorausgesetzt, wo $F(x, a)$ eine algebraische Function der zwei Buchstabengrössen x und a anzeigt, und es sollen die

---

[1]) Die Abhandlung wurde über Antrag des Hrn. Prof. Petzval zur Aufnahme in die Denkschriften der Classe bestimmt.

Genüge leistenden Werthe von x, welche in der Regel Functionen der einzigen Grösse a sind, angegeben werden. Gesetzt $x = \varphi(a)$ wäre ein solcher, so ist die Aufzählung aller möglichen solchen Functionen zu bewerkstelligen. Das zweite Problem nimmt zwei Gleichungen:

$$F_1(x, y, a) = 0\ , F_2(x, y, a) = 0$$

als gegeben an, in welchen die drei Buchstabengrössen x, y, a durch algebraische Rechnungsweisen mit einander verknüpft sind. Einem solchen Systeme von Gleichungen genügt man in der Regel durch bestimmte Werthe von x und y, die gleichfalls keine Zahlenwerthe, sondern bestimmte Functionen der überschüssigen Buchstabengrösse a sind; z. B. durch:

$$x = \varphi(a)\ , y = \psi(a).$$

Jede Auflösung besteht aus einer solchen Zusammenstellung von zwei Functionen, wovon die eine den Werth von x, die andere jenen von y vorstellt. Es sind ihrer meistentheils mehrere möglich, und es wird gefordert, alle diese verschiedenen Auflösungen der Reihe nach aufzuzählen.

Diese zwei Probleme kommen darin überein, dass es sich um die Angabe von Genüge leistenden Werthen der Unbekannten handelt, die jedoch keine bestimmten Zahlwerthe, sondern Functionen von a sind.

Gleichungen und Systeme von Gleichungen der obenerwähnten Gattung, welche nebst den Unbekannten noch andere überschüssige Buchstabengrössen beherbergen, ergeben sich dem mathematischen Forscher ungleich häufiger, als Zahlengleichungen, d. h. als jene Gleichungen und Systeme von Gleichungen, welche nur die Unbekannten und sonst keine weiteren Buchstabengrössen in sich schliessen und denen bestimmte Zahlen als Auflösungen entsprechen. Bei den meisten geometrischen und mechanischen Problemen ist vielmehr eine Curve oder eine Fläche oder ein anderes analoge Gebilde zu erforschen, gegeben durch eine algebraische Gleichung oder ein System von mehreren solchen oder endlich durch eine Differential-gleichung. Liegt eine Gleichung oder ein System von solchen vor, so können es nur Buchstabengleichungen sein, denn Zahlengleichungen bestimmen nur Punkte, und keine ausgedehnten Gebilde. Hat man aber eine Differential-Gleichung vor Augen, so handelt es sich um ihre Integration und diese erfordert sehr oft als untergeordnete Rechnungsoperation die Auflösung einer höheren algebraischen Gleichung, die nur bisweilen eine Zahlengleichung, bei weitem öfter jedoch eine Buchstabengleichung ist.

Man gelangt also bei sehr vielen Problemen theils direct theils indirect zu Buchstabengleichungen, und es erscheint demnach eine allgemeine Auflösungsmethode für dieselben sehr wünschenswerth. Durchgeht man die bisher bekannten Auflösungsmethoden der Reihe nach, wie sie in der Theorie der algebraischen Gleichungen aufgeführt werden, so wird man sehr bald zur Überzeugung gelangen, dass in diesem Felde fast noch gar nichts Derartiges bestehe:

Die strengen Auflösungsmethoden sind zwar bis zum vierten Grade möglich, allein schon beim dritten Grade erweist sich die Cardan'sche Formel als praktisch unbrauchbar, weil sie viel weniger Durchsichtigkeit besitzt, als die Gleichung selber. Wollte man dennoch diese Formel benützen, so würde man sich in langwierige Rechnungen verwickelt sehen, weil man die dort angezeigten Wurzelausziehungen wirklich zu bewerkstelligen hätte. Diese müssen dann in einer gewissen Weise geordnet werden, und man würde hierbei eine dem speciellen Zwecke, den man vor Augen hat, entsprechende Wahl zu treffen haben, widrigenfalls man nach vollendeter Entwickelung meistentheils zu keiner klareren Einsicht über den bestimmten Fragepunkt gelangen würde, sondern mit nicht geringer Mühe eine neue Form erhalten hätte, die eben so wenig Licht gewährt, als die ursprünglich gegebene Gleichung selber.

Wenn aber schon die Cardan'sche Formel sich als zu complicirt und desshalb als unbrauchbar darstellt, so wird dieser Übelstand bei der analogen Formel für die Gleichung des vierten Grades nur in einem um so grösseren Masse auftreten. Für Gleichungen des fünften, oder eines noch höheren Grades behebt sich freilich dieser Übelstand von selbst, weil für diese keine geschlossenen Wurzelformeln mehr bestehen, und die eben gemachten Bemerkungen beruhigen uns vollkommen über diese unausfüllbare analytische Lücke, denn selbst dann, wenn für die Gleichungen des fünften und noch höherer Grade die allgemeine Auflösung durch Formeln, die der Cardan'schen ähnlich wären, nicht zu den Unmöglichkeiten gehören würde, könnte man keinerlei Vortheil hiervon erwarten, weil sie die Eigenschaften der Genüge leistenden Werthe noch weit mehr verbergen würden, als dies die Gleichung selber thut. Wir gelangen hiermit zur Überzeugung, dass von den strengen Auflösungsmethoden bei einigermassen höherem Grade der Gleichung kein günstiger Erfolg erwartet werden könne und dass nur die Gleichungen des ersten und zweiten Grades sich auf solche Weise mit Vortheil behandeln lassen. Ausser diesen strengen Methoden, welche die Wurzeln einer Gleichung durch eine Combination von Wurzelgrössen darstellen, bestehen zwar noch Approximations-Methoden; allein diese gelten nur für Zahlengleichungen und verstatten keine Anwendung auf solche mit Buchstabengrössen in den Coëfficienten. Hier ist also eine Lücke in der Theorie der algebraischen Gleichungen, die, wiewohl sich bekanntermassen die grössten Mathematiker mit diesem Theile der Analysis beschäftigt haben, bis heute unausgefüllt geblieben ist. Es müsste auch Wunder nehmen, wenn ein so wichtiger Gegenstand, wie der hier erwähnte, bisher ganz unbeachtet, oder auch nur die darauf bezüglichen Untersuchungen erfolglos geblieben wären, da doch fast jeder Analytiker, der sich mit geometrischen und mechanischen Problemen beschäftigt, zu solchen Gleichungen gelangt, die dann sich wie ein unübersteigliches Hinderniss der weiteren Forschung in den Weg stellen. Ein so wichtiger Gegenstand konnte der Natur der Sache nach schon von den Mathematikern der ältesten Zeit nicht unbeachtet bleiben. Es finden sich auch schon die ersten Versuche zur allgemeinen Auflösung solcher Gleichungen in den Werken von Newton, Lagrange und Anderen. Sie betrachteten jedoch immer nur sehr specielle Fälle und gelangten durch eigenthümliche Betrachtungsweisen, die eben nur auf einen solchen beschränkten Fall Anwendung verstatteten, zu den gefundenen Auflösungen. Unter all diesen Bemühungen waren noch diejenigen von Lagrange von dem grössten Erfolge begleitet, denn er fand eine analytische Regel zur Auflösung einer ganzen algebraischen Gleichung, in deren Coëfficienten eine einzige Buchstabengrösse erscheint. Es darf nicht überraschen, dass die Bemühungen dieser grossen Männer einen verhältnissmässig geringen Erfolg hatten, denn sie gehören einer Zeit an, in welcher selbst die Auflösung einer Zahlengleichung noch Schwierigkeiten bot und wo das Suchen nach geschlossenen Auflösungen durch Formeln, die der Cardanischen ähnlich sein sollten, zu den heissesten Wünschen der Mathematiker gehörte, alle übrigen wissenschaftlichen Bedürfnisse zeitweilig in Schatten stellend. Zu einer Zeit, wo dieses einfachere Problem noch nicht vollständig gelöst war, musste wohl jenes andere complicirtere desto mehr Schwierigkeiten bieten. Wir finden auch, dass diese zwei verschiedenen und doch sehr verwandten Gegenstände in ihrer Entwickelung auch fortan Hand in Hand gingen. Nachher beschäftigte sich nämlich Fourier sehr angelegentlich mit diesem Gegenstande, und wir haben, gewissen Andeutungen in seinen Werken nach, allen Grund zu glauben, dass er eine allgemeine Auflösungsmethode für solche Gleichungen und Systeme von Gleichungen gefunden habe. Leider sind die Ergebnisse dieser Untersuchungen gleichwie viele andere von ihm aufgefundene Schätze des Wissens für uns verloren gegangen. Ich selbst beschäftigte mich mit diesem Gegenstande. Bei meinen Untersuchungen über die linearen Differentialgleichungen gelangte ich nicht nur zu einer Reihe von Integrationsmethoden für dieselben, sondern ich fand auch Auflösungsmethoden für eine algebraische Gleichung, welche nebst den Unbekannten noch andere constante Parameter beherbergt. Diesen meinen Fund habe ich einmal auch zum Gegenstande meiner öffentlichen Vorträge gemacht und die Grundzüge meiner Methode in meinem Werke: „Integration der linearen Differentialgleichungen", niedergelegt. Später erst wurde mir kund, dass schon Fourier, wiewohl auf einem andern Wege, denselben Gegenstand behandelt hatte. Es besteht nämlich ein Werk von M. Fourier: „*Analyse des equations déterminées*", in welches dieser grosse Mathematiker seine Untersuchungen über Gleichungen niederlegen wollte. Leider ist der grösste Theil hiervon für uns verloren gegangen, weil die Herausgabe des zweiten Bandes durch seinen Tod vereitelt wurde. Der erste Band enthält glücklicher Weise eine kurze übersichtliche Darstellung, *Exposée synoptique* des Gesammtinhaltes. Hieraus ist nun ersichtlich, dass das 4. Buch dieses Werkes eine allgemeine Auflösungsmethode für Buchstabengleichungen und Systeme von solchen enthalten sollte. Daselbst sind auch in gedrängter Kürze die Grundzüge dieser Methode auseinandergesetzt; allein sie scheinen bisher selbst gelehrten Lesern ganz und gar unverständlich geblieben zu sein, vermuthlich wegen der ganz eigenthümlichen Behandlungsweise dieses Gegenstandes, und wären es vielleicht auch für uns, wenn wir nicht, in einem ähnlichen Gedankengange befangen, bei den Untersuchungen über Differentialgleichungen zu ähnlichen Formen gelangt wären. Es ist eine bekannte Thatsache, dass derselbe Gegenstand, von verschiedenen Analysten in Angriff genommen, in der Regel auf eben so viele verschiedene Arten behandelt wird. Jeder geht von seinem eigenen Gesichtspunkte aus und verfolgt einen eigenthümlichen Weg. Die unmittelbare Folge hiervon ist, dass die Ergebnisse solcher Untersuchungen ebenfalls verschieden ausfallen, insoweit eine solche Verschiedenheit überhaupt möglich ist. So verhält es sich auch hier. Ich behandelte den Gegenstand von meinem Gesichtspunkte aus, indem ich vorzüglich nur die Integration der linearen Differential-Gleichungen vor Augen hatte und entwickelte desshalb die Auflösungsmethode nur für eine einzige Gleichung mit darin erscheinenden constanten Parametern, weil nur dieses Problem als untergeordnete Rechnungs-Operation zur Einleitung der wirklichen Integration sich mir darbot. Fourier hingegen betrachtete, seinen Andeutungen in dem früher erwähnten Werke zufolge, den Gegenstand von einem anderen, für die Theorie der Gleichungen allgemeineren Gesichtspunkte. Diesen beiden verschieden gewählten Standpunkten entsprechend, gestalteten sich auch die eingeschlagenen Wege verschieden und so kommt es, dass meine über diesen Gegenstand ganz selbstständig eingeleitete Untersuchung, die einer frühern Zeit angehört, zu der ich von dieser Andeutung im „*Exposée synoptique*“ Nichts wusste, für den ersten Blick sogar in ihren Resultaten ganz verschieden erscheint von jener Fourier's. Vergleicht man diese zwei verschiedenen Wege und die gewonnenen Resultate mit einander, so scheint sogar der von Fourier eingeschlagene minder einfach, und man ist um so mehr versucht sich darüber zu wundern, als bekanntlich Fourier in allen seinen Werken eine unerreichbare Einfachheit und Klarheit der Darstellung eigenthümlich besass. Bei näherer Beleuchtung stellt sich jedoch diese anfangs complicirter erscheinende Ableitungsweise von Fourier als wohlbegründet heraus, denn nur, von dieser Seite angegriffen, war es möglich, eine allgemeine Auflösungsmethode zu finden, für eine Gleichung sowohl wie für ganze Systeme von solchen, in welchen nebst den Unbekannten noch eine beliebige Anzahl von überschüssigen Buchstabengrössen erscheinen, während meine für das speciellere Problem einer einzigen Gleichung mit einem einzigen constanten Parameter in den Coëfficienten eingeleitete Untersuchung eben nur auf diesen speciellen Fall passt. Wir sind auch im Voraus überzeugt, dass der von

Fourier zur Auflösung von Systemen von Buchstaben-Gleichungen eingeschlagene Ideengang auch bei partiellen Differential-Gleichungen und Systemen von mehreren solchen sich einst nutzbringend erweisen wird. Das Auffinden dieser Andeutungen im *„Exposée synoptique"* des früher erwähnten Werkes von Fourier, so wie die Wiederauffindung seiner Methode gehört dem Verfasser dieser Abhandlung. Derselbe, einst mein Schüler, jetzt Genosse meiner Arbeiten, wurde durch meine analogen Methoden für die Integration der linearen Differential-Gleichungen bei dem Studieren dieses viel zu wenig gekannten und gewürdigten Werkes von Fourier auf die Spur geleitet, und es ist ihm gelungen, die Methode des grossen Analysten zur Auflösung von Buchstaben-Gleichungen und Systemen von solchen genau in derselben Weise wieder aufzufinden, wie sie einst Fourier selbst, seinen Andeutungen nach, gehabt haben mochte. Es lag dies zwar so eigentlich nicht in der ursprünglichen Absicht; der Verfasser ging vielmehr, so wie jeder andere an seiner Stelle, auch darauf aus auf dem wenig betretenden Felde wo möglich einiges Eigenthum zu gewinnen, und glaubt auch wirklich einiges aufgefunden zu haben. In der Mehrzahl der Fälle jedoch geschah es, dass er zwar meinte einen eigenen Fund gethan zu haben und dann, Fourier's *„Exposée synoptique"* zur Hand nehmend, zu seiner Überraschung gewahr ward, wie derselbe darin bereits angedeutet war mit wenigen, aber so bezeichnenden Worten, dass kein Zweifel übrig bleiben konnte, Fourier habe dasselbe bereits selbst besessen. Er fand sich dadurch noch mehr bestimmt, in dieser Abhandlung, welche einen Theil dieses Fundes zum Gegenstande hat, genau den von Fourier eingeschlagenen Weg beizubehalten. Es schien dies keinesweges blos ein Opfer, welches man den Manen dieses grossen Mannes bringt; wir hegen vielmehr die Überzeugung, dass diese Darstellungsweise zugleich die allgemeinste von allen sei, indem sie nicht blos eine einzige Buchstaben-Gleichung mit einer einzigen überschüssigen Buchstabengrösse aufzulösen verstattet, sondern allgemeine Gültigkeit besitzt, wie gross auch die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten oder der überschüssigen Buchstabengrössen sein mag, und freuen uns sie der mathematischen Welt bieten zu können als eine nicht leicht zu erschöpfende Fundgrube neuer wichtiger Entdeckungen nicht blos auf dem Felde der algebraischen, sondern auch auf jenem der partiellen Differential-Gleichungen.

Wir wollen jetzt einen kurzen Abriss geben von den in dieser Abhandlung niedergelegten Untersuchungen und die in Rede stehende Auflösungsmethode zu skizziren versuchen. Bevor wir jedoch dazu schreiten, müssen wir noch einige wenige Worte vorausschicken, um Missverständnisse zu vermeiden.

Die Auflösung einer Gleichung oder eines Systemes von Gleichungen ist nie als Zweck, sondern nur als Mittel zum Zwecke anzusehen. Hat nämlich die Behandlung irgend eines Problemes zu einer Gleichung geführt, so handelt es sich darum aus derselben jene Schlussfolgerungen abzuleiten, die zur Beantwortung der gestellten Frage dienen. Eine Auflösungsmethode, die diesem praktischen Zwecke entsprechen soll, muss daher eigentlich in der Detaillirung der Eigenschaften bestehen, die in der Gleichung zwar schon niedergelegt sind, aber in einer viel zu bündigen und desshalb für uns unverständlichen Sprache. Wäre es möglich diese Eigenschaften aus der Gleichung selbst schon zu ersehen, so wäre eine Auflösung derselben überflüssig und nur ein zweckloser Umweg, der zur Beantwortung der gestellten Frage Nichts beiträgt. Weil aber diese unmittelbare Einsicht in der Regel nicht möglich ist, so wird man sich bemühen müssen durch gewisse Operationen diesen Zweck zu erreichen. Die Methode nun, welche durch ein regelmässiges Verfahren zu dieser Einsicht führt, die bei dem unmittelbaren Betrachten der Gleichung noch nicht möglich ist, belegen wir mit dem Namen einer Auflösungsmethode. Indem wir hier von dem praktischen Werthe ausgehen, werden wir eine Auflösungsmethode an und für sich verwerfen, wenn sie für die Unbekannte zwar einen Genüge leistenden Ausdruck liefert, aber in einer Gestalt, die ihre wissenswerthen Eigenschaften ebenso oder vielleicht noch in einem grössern Masse verhüllt, als die Gleichung selber. Wir haben schon einen solchen Fall erwähnt, nämlich die Cardanische Formel für die Gleichung des dritten und die ihr ähnliche für jene des vierten Grades.

Wir werden daher keineswegs zunächst auf geschlossene Formen der Wurzeln Jagd machen, und es können unendliche Reihen für uns denselben und mitunter einen höheren Werth besitzen, wenn sie die leichte Beantwortung der gestellten Fragen ermöglichen. Die Auflösung einer Gleichung wird eher als ein Discutiren der wichtigen Eigenschaften der Genüge leistenden Werthe anzusehen sein. Ein solches Discutiren lässt sich, der Natur der Sache nach, nicht mit einem einzigen Schlage vollenden, sondern zerfällt in eine Anzahl von Partialuntersuchungen, und zwar in eine um so grössere Anzahl, je mehr verschiedene Eigenschaften zu erörtern sind, je complicirter das Problem ist. Es genügt desshalb nicht, die Wurzeln einer Gleichung in einer einzigen Form darzustellen, sondern man ist genöthigt, sie sich in mehreren verschiedenen Formen zu verschaffen, weil eine jede einzelne Form nur eine einzige Eigenschaft aufzuklären vermag und über alle übrigen Eigenschaften gar keinen Aufschluss gibt. Nur in den allereinfachsten Fällen genügt es, die Wurzel in einer einzigen Form zu besitzen.

In den hier erwähnten beiden Problemen sind die Genüge leistenden Werthe Functionen einer einzigen Grösse a; und die Auflösungsmethode hat demnach alle wichtigen Eigenschaften solcher Functionen aufzudecken. Man erreicht diesen Zweck folgendermassen:

Erstens: Man entwickelt die Genüge leistenden Functionen in Form einer absteigenden nach Potenzen von a geordneten Reihe und erhält hierdurch über das Verhalten derselben für sehr grosse Werthe von a Aufschluss, diese Form ist desshalb auch die assymptotische.

Zweitens: Man eruirt alle jene endlichen Werthe von a, für welche eine Unterbrechung der Stetigkeit eintritt.

Drittens: Man entwickelt die Genüge leistenden Werthe in Reihenform, aufsteigend geordnet nach Potenzen einer Grösse: $\mathrm{a} = a - \alpha$, wo α eine ganz beliebige, aber bestimmte Zahl bedeutet. Diese Entwickelungsweise ist jedoch vorzugsweise nur für jene Werthe von α einzuleiten, welche der Unterbrechung der Stetigkeit entsprechen. Man gelangt dadurch zur Kenntniss aller Nenner und Irrationalgrössen, die in den Genüge leistenden Functionen erscheinen und ist dadurch oft im Stande, eine einfache geschlossene Form für dieselben aufzufinden. Die aufsteigende Entwickelung für andere Werthe von α, für welche keine Unterbrechung der Stetigkeit stattfindet, ist jedoch von sehr untergeordnetem Nutzen, denn sie liefert keine auffallende Eigenschaft, weil bekanntlich jede Function in dem Bereiche der Stetigkeit auf diese Form gebracht werden kann; sie ist daher am wenigsten geeignet eine Function zu charakterisiren.

Wir haben hiermit ganz offen bekannt, dass die in Rede stehende Auflösungsmethode vorzüglich auf Reihenentwickelungen basirt und dass geschlossene Formen nur nebenher gesucht werden, wenn die eingeleiteten Entwickelungen auf solche hinweisen. Es steht zu erwarten, dass dieses offene Geständniss bei den meisten Lesern, statt als eine Anempfehlung dieser neuen Auflösungsmethode zu gelten, gerade das Gegentheil bewirken dürfte. Die Mehrzahl der mathematischen Welt sieht in Reihenentwickelungen Nichts, als ein unbequemes Verfahren und entschliesst sich erst dann dazu, wenn geschlossene Formen durchaus den Dienst versagen. Bei vielen Lesern mag sogar der Zweifel rege werden, ob denn doch diese Auflösungsmethode etwas Neues sei, denn bekanntlich ist man mittelst der Taylor'schen und Mac-Laurin'schen Reihe schon seit langer Zeit im Stande, explicite und implicite Functionen aufsteigend zu entwickeln, und man weiss sehr gut, dass diese Entwickelungsweise von keinem besondern Nutzen sei und über die wichtigen Eigenschaften keinen Aufschluss ertheile, weil jede stetige Function auf diese Form gebracht werden kann. Wir führen diese Einwendungen hier absichtlich an, weil wir aus eigener Erfahrung wissen, dass dieses eine ziemlich verbreitete Meinung sei, und sehen uns daher verpflichtet etwas näher darauf einzugehen.

Vor Allem muss man einen Unterschied machen zwischen auf- und absteigenden Reihenentwickelungen. Bisher war es nur möglich, die Wurzeln einer Gleichung aufsteigend zu entwickeln; die absteigende Entwickelung war bisher unbekannt. Die aufsteigende Entwickelung liefert wohl keinen bedeutenden Aufschluss über die Functionen; die absteigende Entwickelung hingegen lehrt eine sehr wichtige Eigenschaft erkennen, weil sie über das Verhalten derselben für sehr grosse Werthe der Variablen Aufschluss ertheilt. Die aufsteigende Entwickelung war bisher nur für jene Fälle bekannt, in welcher die Mac-Laurin'sche Formel Anwendung verstattet, und die Genüge leistende Function in der Form erscheint:

$$\varphi(a) = h_0 + h_1 (a-\alpha) + h_2 (a-\alpha)^2 + \ldots$$

aber nicht mehr für solche Werthe von α, welche eine Unterbrechung der Stetigkeit herbeiführen und demnach die Mac-Laurin'sche Formel ausser Wirksamkeit setzen, weil dann auch Glieder mit Potenzen von $(a-\alpha)$ aufzunehmen sind, welche negative und gebrochene Exponenten besitzen. Die aufsteigende Entwickelung konnte bisher nur für jene Fälle eingeleitet werden, welche keinen Aufschluss ertheilen, während gerade die Ausnahmsfälle die grössere Wichtigkeit besitzen. Hierzu war es aber einerseits nothwendig, diese speciellen Werthe von α zu kennen, anderseits aber, für dieselben die aufsteigende Reihenentwickelung durchzuführen. Beides gehörte bisher zu den Unmöglichkeiten. Der früher erwähnte Vorwurf trifft daher gerade nur jene aufsteigenden Reihenentwickelungen, welche wir eben als am wenigsten nutzbringend bezeichnet haben. Wir haben die volle Überzeugung, dass diese Auflösungsmethode nur allmählich sich Geltung verschaffen werde, wenn über den eigentlichen Zweck der Auflösung eine klare Vorstellung Platz gegriffen hat und man zur Überzeugung wird gelangt sein, dass sie Alles leiste, was man vernünftigerweise zu fordern berechtigt ist.

Erstes Problem: Auflösung einer Gleichung mit zwei Buchstabengrössen x und a.

Die gegebene Gleichung denken wir uns in der Form:

$$S\,[H a^{\mathfrak{a}}\, x^{\mathfrak{x}}] = 0,$$

also ihren ersten Theil als ein Polynom, bestehend aus Gliedern von der Form $H a^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}}$, wo $H, \mathfrak{a}, \mathfrak{x}$ bestimmte Zahlwerthe bedeuten. Bekanntlich kann jede algebraische Gleichung durch Wegschaffen der Irrationalgrössen und Nenner auf diese Form gebracht werden, wobei noch überdies die Exponenten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{x}$ ganze positive Zahlenwerthe besitzen. Die hier vorausgesetzte Form wird daher keinesweges die Auflösungsmethode auf ganze und rationale algebraische Gleichungen beschränken, sondern allgemeine Anwendbarkeit besitzen auf wie immer gestaltete algebraische Gleichungen. Die Auflösung dieser Gleichung wird, wie schon erwähnt worden, durch drei verschiedene Untersuchungen bewerkstelligt, nämlich:

1. Durch die absteigende nach Potenzen von a geordnete Entwickelung von x.

2. Durch die aufsteigende Entwickelung von x nach Potenzen einer beliebigen Grösse $a - \alpha = \mathrm{a}$ geordnet.

3. Durch Bestimmung aller jener Zahlenwerthe α, welche einer Unterbrechung der Stetigkeit entsprechen.

1. Absteigende Entwickelung von x.

Man denke sich hier die Unbekannte $x = \varphi(a)$ in der Gestalt:

$$x = \varphi(a) = h_0\, a^{\xi_0} + h_1 . a^{\xi_1} + h_2\, a^{\xi_2} + \ .\ \ .\ \ .$$

wobei zwischen den Exponenten ξ die Relationen:

$$\xi_0 > \xi_1 > \xi_2 > \ldots.$$

bestehen; und es handelt sich um die Bestimmung der Zahlenwerthe von ξ_0, h_0, ξ_1, h_1, ξ_2, h_2. . . . Bei der Bestimmung dieser Grössen befolgt man die hier angegebene Ordnung und verschafft sich auf solche Weise die einzelnen Glieder in ihrer natürlichen Reihenfolge.

Man beginnt mit der Bestimmung des Anfangsgliedes $h_0 a^{\xi_0}$ und schreitet dann zur Bestimmung der Folgeglieder. Die Bestimmung des Anfangsgliedes erheischt zwei getrennte Untersuchungen, nämlich die Bestimmung des Exponenten ξ_0 und jene des Coëfficienten h_0.

Die Bestimmung des Exponenten ξ_0 hängt von einer ganz eigenthümlichen Untersuchung ab, von der wir, ohne weitläufig zu werden, nur durch eine geometrische Construction eine klare Darstellung zu geben vermögen. Hieraus folgt jedoch keineswegs, dass man bei der Auflösung einer Gleichung in Wirklichkeit den Zirkel zur Hand zu nehmen und diese geometrische Construction auszuführen genöthigt sei; es besteht im Gegentheile eine sehr einfache analytische Regel, die ohne alle Zeichnung zu den verlangten Werthen von ξ_0 führt, und die geometrische Construction hat eben nur den Zweck, von dieser Regel eine klare Darstellung zu geben. Sie besteht in Folgendem:

Man bilde, einem jeden einzelnen Gliede $Ha^{\mathfrak{a}}x^{\mathfrak{r}}$ des Gleichungspolynoms entsprechend, eine Gleichung:

$$\eta = \mathfrak{a} + \mathfrak{r}\xi$$

und denke sich eine jede derselben geometrisch construirt, indem man ξ und η als Abscisse und Ordinate eines Punktes auf der Ebene trachtet. Weil diese Gleichungen alle vom ersten Grade nach ξ und η sind, so liefern sie gerade Linien. Solcher geraden Linien sind so viele zu verzeichnen, als Gleichungen des ersten Grades zwischen ξ und η bestehen, also so viele, als im Gleichungspolynome Glieder erscheinen und man erhält daher ein ganzes System solcher sich verschiedentlich durchschneidender Linien. Es besteht nun ein gewisser Theil der Ebene, der oberhalb aller dieser Linien liegt, so zwar, dass die in irgend einem beliebigen Punkte der Abscissenaxe errichtete Ordinate, nach aufwärts verlängert, zuerst alle Linien des verzeichneten Systems der Reihe nach trifft und dann erst in den erwähnten, oberhalb gelegenen Bereich der Ebene gelangt, der die Punkte in sich fasst, welche für dasselbe ξ grössere Ordinaten η besitzen, als alle geraden Linien. Dieser Bereich der Ebene stellt ein Polygon dar, welches nach oben unbegrenzt, und nur nach unten zu von gewissen Stücken der verzeichneten Linien begrenzt ist, die in Ecken aneinanderstossen. Die diesen Eckpunkten entsprechenden Abscissen sind die verlangten Werthe von ξ_0. Die Anzahl der verschiedenen Werthe von ξ_0 stimmt daher mit der Anzahl der Ecken des Polygons zusammen. Diese geometrische Zeichnung dient aber nicht blos zur Eruirung der Werthe von ξ_0, sondern auch zur Bestimmung der zugehörigen Coëfficienten h_0. Der Eckpunkt, welcher ξ_0 als Abscisse besitzt, erscheint nämlich als Durchschnittspunkt zweier, gelegentlich auch mehrerer geraden Linien des verzeichneten Systems, und bezeichnet dadurch gewisse Glieder des Gleichungspolynoms, welche eben diesen Linien correspondiren. Man substituirt nun in die Summe der auf solche Weise bezeichneten Glieder des Gleichungspolynoms, die wir mit:

$$\Sigma\ [Ha^{\alpha}\, x^{r}]$$

andeuten wollen, $a = 1$, $x = \mathrm{h}$, und setzt diesen Ausdruck der Nulle gleich, so erhält man eine Gleichung:

$$\Sigma\ [Hh^{r}] = 0,$$

welche nur eine einzige Unbekannte h enthält, und nach derselben aufgelöst, die Werthe von h_0 gibt, die dem erwählten Werthe ξ_0 entsprechen. Die Construction dieser Gleichung muss für jeden der Werthe ξ_0 eigens vorgenommen werden und man findet so alle möglichen Combinationen von ξ_0 und h_0, welche dem Anfangsgliede $h_0 a^{\xi_0}$ entsprechen, somit auch alle möglichen Anfangsglieder. Die Bestimmungsgleichung für h_0 kann sowohl vom ersten, als auch von höherem Grade sein und sie liefert daher zu einem bestimmten Exponenten ξ_0 entweder nur ein einziges h_0, oder deren mehrere. In der Regel ist diese Gleichung eine binomische, und ihre Auflösung daher nur mit geringer Mühe verknüpft; allein auch in den ungünstigeren Fällen, wo die binomische Form nicht Platz greift, ist ihre Auflösung von keiner Schwierigkeit, nur wird man mitunter zur approximativen Bestimmung seine Zuflucht nehmen müssen. Auf solche Weise gelangt man zu einer Reihe von verschiedenen Anfangsgliedern $h_0 a^{\xi_0}$.

Zu diesem Verfahren kann man auf sehr verschiedene Weise gelangen. In dieser Abhandlung ist dasselbe direct abgeleitet, unabhängig von den Lehrsätzen der allgemeinen Theorie der algebraischen Gleichungen, indem nur die Bedingungen erörtert werden, unter welchen bei der Substitution einer absteigend geordneten, mit dem Anfangsgliede $h_0 a^{\xi_0}$ beginnenden Reihe, anstatt x in das Gleichungspolynom eine Reduction der höchsten Glieder auf Null in dem Substitutions-Resultate erfolgt. Es zeigt sich, dass hierzu zwei Bedingungen erforderlich sind, nämlich: erstens, dass das höchste Glied des Substitutions-Resultates sich aus zwei oder mehreren Bestandtheilen zusammensetzt, die dieselbe höchste Potenz von a enthalten und daher eine Reduction verstatten, und zweitens, dass bei dieser Reduction ein völliges Verschwinden derselben eintritt. Die erste dieser Bedingungen bestimmt ξ_0, die zweite h_0.

Die Folgeglieder, welche zu einem bestimmten Anfangsgliede $h_0 a^{\xi_0}$ gehören, ergeben sich durch ein regelmässiges Verfahren. Meistentheils unterscheiden sich nämlich die verschiedenen Auflösungen einer Gleichung schon in dem ersten Gliede von einander, so dass mit der Bestimmung der Anfangsglieder alle Auflösungen von einander isolirt sind. Findet dieser gewöhnliche Fall Statt, so gehört zu einem bestimmten Anfangsgliede $h_0 a^{\xi_0}$ nur eine einzige Reihe von Folgegliedern. Man findet dieselben der Reihe nach durch folgendes sehr einfache Rechnungsverfahren. Man substituirt das bekannte Anfangsglied $h_0 a^{\xi_0}$ anstatt x in das Gleichungspolynom, ordnet das Substitutions-Resultat absteigend nach a und multiplicirt dann das erste, höchste Glied mit einem bestimmten Factor. Man gelangt auf diese Weise zu dem ersten Folgegliede $h_1 a^{\xi_1}$. Das zweite Folgeglied $h_2 a^{\xi_2}$ ergibt sich auf eine ähnliche Weise, indem man anstatt x den bereits ermittelten Bestandtheil $h_0 a^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1}$ substituirt, und das erste Glied des gehörig geordneten Substitutions-Resultates mit demselben Factor multiplicirt. Man verfährt so fort und erhält der Reihe nach die Folgeglieder zu dem erwählten Anfangsgliede $h_0 a^{\xi_0}$ in einer beliebigen Anzahl. Der Factor, mit welchem das höchste Glied der Substitutions-Resultate zu multipliciren ist, lässt sich aus der Summe der bezeichneten Glieder:

$$\Sigma\,[H a^{\alpha}\, x^{r}]$$

durch eine sehr einfache Regel ableiten; er ist nämlich:

$$-\frac{1}{\Sigma\,[H r\, h_0^{r-1}\, a^{\alpha+(r-1)}\;]}.$$

Meistentheils lässt sich das zur Bestimmung der Folgeglieder dienende Verfahren ins Unendliche wiederholen, und man erhält daher eine unendliche Reihe für x; nur selten bricht diese Reihe ab, indem bei einem gewissen Folgegliede das Substitutions-Resultat den Werth Null erhält, wodurch der Beweis geliefert ist, dass die erhaltenen Glieder die Wurzel x bereits vollständig zusammensetzen.

Das erwähnte Verfahren besitzt nur so lange seine Gültigkeit, als das Anfangsglied $h_0\, a^{\xi_0}$ einer einzigen Wurzel x zukommt; ist hingegen dasselbe zweien oder mehreren Wurzeln gemeinschaftlich, was sich dadurch kund gibt, dass h_0 eine wiederholte Wurzel der Bestimmungsgleichung:

$$\Sigma\,[H h^{r}] = 0,$$

ist, so hat an seine Stelle ein anderes, etwas complicirteres Verfahren zu treten. Man findet nämlich dann die Folgeglieder nicht mehr durch Auflösung einer Gleichung des ersten Grades, sondern aus einer höheren, und dieses complicirtere Verfahren ist so lange zu wiederholen, bis man eine genügende Anzahl von Gliedern bestimmt hat und endlich zu demjenigen gelangt, in welchem die Auflösungen sich von einander unterscheiden. Ist man so weit gekommen, so ist die Wurzel wieder vollkommen isolirt und die nächstfolgenden Glieder ergeben sich durch das frühere einfache Verfahren.

Da die absteigende Entwickelung meistentheils zu unendlichen Reihen führt und daher die Wurzel nur in einer gewissen Anzahl von Gliedern, also nur annäherungsweise liefert; so hat man nach dem Abbrechen der Entwickelung noch das Ergänzungsglied zu bestimmen, d. h. man hat die Summe der ausgelassenen Glieder innerhalb zweier Grenzwerthe einzuschliessen. Es geschieht dies hier in ähnlicher Weise, wie bei dem Wurzelausziehen.

2. Aufsteigende Entwickelung von x nach einer beliebigen Grösse $a - \alpha = \mathrm{a}$.

Man ordnet zu diesem Zwecke das Gleichungs-Polynom nach der Grösse $\mathrm{a} = a - \alpha$, und bringt es auf die Form:

$$S\,[\mathrm{H}\,\mathrm{a}^{a}\, x^{r}] = 0.$$

Hier wird x vorausgesetzt in der Form:

$$x = h_0\, \mathrm{a}^{\xi_0} + h_1\, \mathrm{a}^{\xi_1} + h_2\, \mathrm{a}^{\xi_2} + \ldots$$

und zwischen den Exponenten ξ die Relation

$$\xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots$$

angenommen.

Diese Entwickelungsweise besitzt grosse Ähnlichkeit mit der früher erwähnten. Man beginnt gleichfalls mit der Bestimmung des Anfangsgliedes $h_0 a^{\xi_0}$ und zuvörderst mit der Bestimmung von ξ_0. Hierzu führt eine ähnliche Untersuchung wie früher, wenn man will, eine geometrische Construction. Man bildet nämlich zuerst die Gleichungen von der Gestalt:

$$\eta = \mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi,$$

construirt das System von geraden Linien, und sucht nun anstatt des oberhalb gelegenen unendlichen Polygons, das unterhalb liegende, welches die Punkte mit durchaus kleineren Ordinaten in sich begreift. Die Ecken dieses Polygons liefern einerseits durch ihre Abscissen die Werthe ξ_0, andererseits bezeichnet jede derselben gewisse Glieder des Gleichungs-Polynoms, aus deren Summe sich durch die Substitutionen $\mathfrak{a} = 1$, $x = h_0$ die Bestimmungsgleichungen für h_0 ergeben. Mit der Bestimmung der Anfangsglieder $h_0\, \mathfrak{a}^{\xi_0}$ ist auch hier die eigentliche Schwierigkeit behoben, denn die Folgeglieder werden auf genau dieselbe Weise, wie bei der absteigenden Entwickelung, gefunden, mit dem einzigen Unterschiede, dass die Substitutionsresultate aufsteigend zu ordnen sind, und das nunmehr erste Glied nach $\mathfrak{a}$ vom niedrigsten Grade ist. Auch hier gelangt man in der Regel zu unendlichen Reihen und ist daher genöthigt zum Schlusse die Bestimmung des Ergänzungsgliedes vorzunehmen.

Die aufsteigende Entwickelung von x führt in der Regel zu der Form:

1) $$x = h_0 + h_1\, \mathfrak{a} + h_2\, \mathfrak{a}^2 + \ldots\ldots$$

und nur für entsprechend gewählte α kann eine Abweichung von dieser Normalform eintreten, und dies ist nicht eine Eigenschaft, die den Wurzeln einer algebraischen Gleichung allein zukommt, denn es ist bekanntlich diese Form allen Functionen ohne Ausnahme eigen. Jede wie immer gestaltete Function lässt sich mittelst der Mac-Laurin'schen Formel in eine Reihe von dieser Gestalt entwickeln, wenn man nicht zufälligerweise einen speciellen Werth von α erwählt, für den diese Form ihre Gültigkeit verliert. Dieser Umstand macht es eben, dass die aufsteigende Reihenentwickelung nur von sehr untergeordnetem Werthe ist für diesen Zweck, wo es sich um Unterscheidung der Functionen von einander handelt, vermittelst gewisser Eigenschaften die ihnen eigenthümlich zukommen; während sie in anderen Fällen, wo es sich um die allgemeinste Form einer Function und Ausseraachtlassung aller speciellen Eigenschaften handelt, wie z. B. bei Existenzbeweisen, vor allen übrigen den Vorzug verdient. Die aufsteigende Entwickelung wird demnach nur sehr selten einzuleiten sein, ausser eben für jene speciellen Werthe von α, welchen eine andere Form als die (1), oder mit anderen Worten, welchen eine Unterbrechung der Stetigkeit entspricht. Entwickelt man für solche specielle Werthe von α, so kann man der aufsteigenden Reihenentwickelung ihren Werth nicht absprechen, denn sie allein ist im Stande, gewisse Eigenschaften der Wurzeln aufzudecken. Es erscheinen nämlich in einem solchen Falle in der Reihe auch Glieder mit negativen oder mit gebrochenen Exponenten und man erfährt auf diese Weise, dass a im Nenner oder unter einem Wurzelzeichen erscheint.

Est ist daher hier unter der aufsteigenden Entwickelung vorzugsweise jene zu verstehen, die vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel nicht eingeleitet werden kann. Um aber diese Entwickelung zu vollführen, muss vorerst die Grösse a, also der Werth α ermittelt werden, der eine solche Aufschluss gebende Form zu liefern im Stande ist, und wir sehen uns auf einem ganz natürlichen Wege zur folgenden Untersuchung geführt:

3. Bestimmung der einer Unterbrechung der Stetigkeit entsprechenden Werthe α.

Diese Werthe α bewirken, dass die aufsteigend nach a geordnete Reihenentwickelung statt der gewöhnlichen Form (1) eine andere liefert, in welcher a mit negativen oder gebrochenen Exponenten versehen erscheint. Die Bestimmung dieser Werthe von α zerfällt demnach in zwei Theile, nämlich:

a) in die Bestimmung jener Werthe von α, welche negative Exponenten von a herbeiführen, und

b) in die Bestimmung jener Werthe von α, welche zwar nur lauter positive Exponenten von a aber darunter auch gebrochene zur Folge haben.

Die erste dieser beiden Untersuchungen erfordert die Auflösung einer Zahlengleichung. Man bringt nämlich das Gleichungs-Polynom auf die Form:

$$S\,[f_r(a)\,x^r] = 0,$$

indem man nach Potenzen von x ordnet, und alle mit derselben Potenz von x versehenen Glieder zusammenfasst; $f_r(a)$ bedeutet hier das, was man gewöhnlich als Gleichungs-Coëfficienten bezeichnet, und stellt ein Polynom vor, bestehend aus Gliedern $H\,a^n$. Nun setzt man den Coëfficienten $f_m(a)$ von der höchsten Potenz x^m der Nulle gleich, und löst die so erhaltene Zahlengleichung:

$$f_m(a) = 0$$

auf. Ihre Wurzeln:

$$\alpha_1, \; \alpha_2, \; \alpha_3 \; \ldots . \; \alpha_r$$

sind die unstetig machenden Werthe der ersten Gattung. Entwickelt man für irgend eine derselben aufsteigend nach $\mathrm{a} = a - \alpha$, so beginnt die Reihenentwickelung mit einem Anfangsgliede:

$$h_0\,\mathrm{a}^{\xi_0} = h_0\,(a - \alpha)^{-k},$$

welches einen negativen Exponenten $\xi_0 = -k$ aufweist. Man erfährt auf solche Weise, dass diese Wurzel einen Nenner $(a - \alpha)^k$ besitzt, und daher bei dem Übertritte von kleineren Werthen von a zu grösseren für $a = \alpha$ durch Unendlich hindurchgeht. Diese Untersuchung liefert daher gleichfalls gewisse Assymptoten, nämlich jene, die in dem Bereiche endlicher Werthe von a existiren.

Die zweite Untersuchung, welche jene Werthe α liefern soll, für die in irgend einem späteren Gliede der aufsteigenden Reihenentwickelung ein gebrochener Exponent ξ auftritt, erfordert die Auflösung eines Systemes von zwei Zahlengleichungen. Man denke sich nämlich zu der ursprünglich gegebenen Gleichung noch eine zweite, durch einmaliges Differenziren nach x daraus abgeleitete hinzugefügt und dieses System von zwei Gleichungen nach a aufgelöst, so erhält man eine Anzahl von Werthen:

$$\alpha' \; \alpha'' \; \alpha''' \; \ldots . \; \alpha^{(s)},$$

ihnen entsprechen die Grössen:

$$\mathrm{a}' = a - \alpha', \; \mathrm{a}'' = a - \alpha'', \; \ldots . \; \mathrm{a}^{(s)} = a - \alpha^{(s)}.$$

Entwickelt man aufsteigend nach Potenzen einer beliebigen dieser Grössen, so werden mitunter in einigen oder auch in allen Wurzeln x Glieder erscheinen, welche gebrochene Exponenten aufweisen und dadurch eine in den Wurzeln enthaltene Irrationalgrösse $\sqrt[p]{a - \alpha}$ zu erkennen geben. Es gibt jedoch auch Fälle, wo keine gebrochenen Exponenten erscheinen und demnach der entsprechende Werth α kein unstetig machender ist. Die durch Auflösung dieses Systemes von zwei Gleichungen gewonnenen Werthe α sind daher diejenigen, welchen muthmasslich Irrationalgrössen entsprechen können. Ob aber dies wirklich der Fall ist oder nicht, kann erst die aufsteigende, hinlänglich weit fortgesetzte Reihenentwickelung entscheiden. Mit diesen drei Untersuchungen ist das Wissenswerthe über die Eigenschaften der Genüge leistenden Functionen vollkommen erledigt, denn alle übrigen Fragen, die noch von Werth wären, beziehen sich auf specielle Werthe von a und x, oder deutlicher gesprochen auf vereinzelte Punkte der ebenen Curve. Ihre Beantwortung hängt von der Auflösung eines Systemes von Zahlengleichungen ab. Diese Untersuchung leistet noch mehr, denn sie liefert durch geeignete Transformationen die Wurzeln in günstigen Fällen auch in geschlossener Form, nämlich durch Combination gewisser Irrationalausdrücke. Die dazu erforderlichen Rechnungsentwickelungen sind bisweilen sehr einfach, so dass man mit leichter Mühe die geschlossene Form finden kann, in anderen Fällen aber sehr complicirt. Die Entscheidung dieser Frage, ob geschlossene Formen durch Combinationen von Irrationalausdrücken herbeigeführt werden können und welche es seien, würde einen eigenen Abschnitt dieser Auflösungsmethode bilden, aber nicht die geringste Ähnlichkeit besitzen mit den bekannten geschlossenen Auflösungen für Gleichungen bis zum vierten Grade, denn hier nimmt man fortwährend Rücksicht auf die Form der Coëfficienten der Gleichung, während dort gerade das Gegentheil stattfindet. Die hier erwähnte Möglichkeit geschlossener Formen steht auch in keinem Widerspruche mit den Unmöglichkeitsbeweisen geschlossener Wurzelformeln für Gleichungen vom fünften Grade angefangen.

Da die hier gegebene Exposition der Auflösungsmethode hie und da wegen der gedrängten Kürze, die hier beobachtet werden musste, für den Leser noch unklare Stellen aufweisen dürfte, so wollen wir schlüsslich versuchen durch ein Beispiel diese Punkte aufzuhellen. Wir erwählen hierzu die Gleichung

$$\begin{aligned}(50a^3+20a+2)\,x^4+(-75a^4+220a^3-28a^2-40a-5)\,x^3+\\ +(-300a^5+230a^4-72a^3-16a^2-6a+20)\,x^2+\\ +(\quad 27a^3-117a^2+135a-45)\,x+\\ +(\quad 108a^4-234a^3+198a^2-90a+18)=0.\end{aligned}\tag{2}$$

1. Absteigende Entwickelung.

Die Regel schreibt vor, ein System von geraden Linien zu verzeichnen, die aus den einzelnen Gliedern zu bilden sind. Es wären ihrer hier 23 an der Zahl. Hier genügt es jedoch, von ihnen nur 5 zu betrachten, nämlich die:

$$\begin{aligned} \eta &= 2 + 4\xi \\ \eta &= 4 + 3\xi \\ \eta &= 5 + 2\xi \\ \eta &= 3 + \xi \\ \eta &= 4 \end{aligned}$$

diejenigen nämlich, die aus den mit der höchsten Potenz von a verknüpften Gliedern der Gleichungs-Coëfficienten hervorgehen. Alle übrigen können aus jeder weiteren Untersuchung ausgelassen werden, weil sie zu einer dieser Linien parallel und unter derselben verlaufen, und daher keinesfalls zur Begrenzung des oberhalb gelegenen Polygons beitragen können.

Verzeichnet man diese fünf geraden Linien, so zeigt sich, dass nur vier derselben die Begrenzung des fraglichen Polygons zusammensetzen helfen, während die fünfte im ganzen Verlaufe unterhalb desselben bleibt und keinen Bestandtheil der Begrenzungslinie abgibt.

Die Begrenzungslinie des Polygons setzt sich nämlich zusammen aus vier Polygonseiten. Die erste erstreckt sich von $\xi = -\infty$ bis $\xi = -\frac{1}{2}$ und gehört der Linie $\eta = 4$ an; an diese stösst eine Polygonseite, welche von $\xi = -\frac{1}{2}$ bis $\xi = 1$ sich ausdehnt und ein Stück der Geraden $\eta = 5 + 2\xi$ ist; an diese reiht sich das von $\xi = 1$ bis $\xi = 2$ reichende Stück der Geraden $\eta = 4 + 3\xi$, und den Beschluss macht die Linie $\eta = 2 + 4\xi$, die für den ganzen übrigen Bereich von $\xi = 2$ bis $\xi = +\infty$ die Begrenzung bildet. Die Linie $\eta = 3 + \xi$ nimmt daran gar keinen Theil sondern verläuft durchaus unterhalb des Polygons.

Man findet daher drei Ecken und die ihnen entsprechenden Abscissen: $\xi = -\frac{1}{2}$, 1, 2 sind die Werthe, die dem ξ_0 ertheilt werden können.

Der nächste Schritt bezweckt die Ermittlung der zugehörigen Coëfficientenwerthe h_0. Man verfährt dazu folgendermassen: Dem

Werthe $\xi_0 = -\frac{1}{2}$ entsprechen die Linien: $\eta = 4$ und $\eta = 5 + 2\xi$ als die sich dort schneidenden und es sind demnach die Glieder:

$$108\, a^4 - 300\, a^5 x^2$$

dadurch bezeichnet. Durch die Substitutionen $a = 1$, $x = h_0$ geht die Bestimmungsgleichung

$$108 - 300\, h_0^2 = 0$$

hervor und liefert zwei Werthe für h_0, nämlich

$$h_0 = \frac{3}{5} \quad \text{und} \quad h_0 = -\frac{3}{5}.$$

Auf gleiche Weise findet man dem $\xi_0 = 1$ und $\xi_0 = 2$ entsprechend die Bestimmungsgleichungen

$$-300\, h_0^2 - 75\, h_0^3 = 0$$
$$-\; 75\, h_0^3 + 50\, h_0^4 = 0$$

und die Werthe

$$h_0 = -4$$
$$h_0 = \frac{3}{2}.$$

Die Anfangsglieder der Auflösungen sind daher folgende vier:

$$x_0 = \frac{3}{2}\, a^2$$
$$x_0 = -4a$$
$$x_0 = \frac{3}{5}\, a^{-\frac{1}{2}}$$
$$x_0 = -\frac{3}{5}\, a^{-\frac{1}{2}}.$$

Man erfährt, dass die Gleichung vier Auflösungen besitzt, die sich schon in den Anfangsgliedern von einander unterscheiden. Mit der Bestimmung der Anfangsglieder ist hier die Trennung der Wurzeln schon erfolgt, und die weitere Berechnung bezieht sich nur immer auf eine einzige Wurzel, diejenige nämlich, die durch das erwählte Anfangsglied bezeichnet ist.

Schreiten wir nun zur Bestimmung der Folgeglieder, die zu dem Anfangsgliede $\frac{3}{2}\, a^2$ gehören. Zu diesem Zwecke hat man $x = \frac{3}{2}\, a^2$ anstatt x in das Gleichungs-Polynom zu substituiren und das Substitutionsresultat absteigend nach Potenzen von a zu ordnen. Bezeichnen wir das Gleichungs-Polynom mit $F(x)$, also das Substitutions-Resultat mit $F\left(\frac{3}{2}\, a^2\right)$, so finden wir:

$$F\left(\frac{3}{2}a^2\right)=\frac{1}{16}\Big[2700a^9+6930a^8-4752a^7-846a^6+432a^5-\\-360a^4-504a^3+2088a^2-1440a+288\Big]$$

Das höchste Glied desselben soll man nun mit einem gewissen Factor multipliciren, nämlich mit:

(3) $$-\frac{8}{1350a^8}.$$

Dieser Factor wird aus der durch $\xi_0=2$ bezeichneten Gliedersumme

$$-75a^4x^3+50a^2x^4$$

abgeleitet; man differenzirt nämlich diesen Ausdruck einmal nach x, in das so erhaltene Binom

$$-225a^4x^2+200a^2x^3$$

substituirt man nun $x=\frac{3}{2}a^2$, und gewinnt so

$$\frac{1}{8}\,1350a^8.$$

Der mit entgegengesetztem Zeichen genommene reciproke Werth desselben:

$$-\frac{8}{1350a^8}$$

ist der gesuchte Factor. Multiplicirt man mit diesem das höchste Glied $\frac{1}{16}\,2700a^9$, so findet man das Folgeglied: $-a$ und die hier betrachtete Auflösung ist, in ihren zwei ersten Gliedern bekannt, folgende:

$$x=\frac{3}{2}a^2-a+\ldots$$

Die Summe dieser zwei Glieder substituirt man nun wieder anstatt x in das Gleichungs-Polynom, und findet so:

$$F\left(\frac{3}{2}a^2-a\right)=\frac{1}{16}\Big[-1350a^8-1440a^7+4386a^6-1716a^5-\\-448a^4+392a^3+248a^2-720a+288\Big]$$

und erhält durch Multiplication des höchsten Gliedes:

$$-\frac{1}{16}\,1350a^8$$

mit dem bekannten Factor (3) das nächste Folgeglied gleich $\frac{1}{2}$. Nun hat man x in drei Gliedern entwickelt:

$$x = \frac{3}{2} a^2 - a + \frac{1}{2} + \ldots$$

Durch Substitution desselben findet man:

$$F\left(\frac{3}{2} a^2 - a + \frac{1}{2}\right) = 0$$

und ersieht hieraus, dass

$$x = \frac{3}{2} a^2 - a + \frac{1}{2} \tag{4}$$

schon der complete Wurzelwerth ist. Die Reihenentwickelung schliesst sich also hier von selbst und alle späteren Glieder würden bei fortgesetzter Approximation sich als Nullen herausstellen.

In ganz gleicher Weise findet man die übrigen drei Wurzeln. Eine derselben ist gleichfalls geschlossen, die beiden andern aber sind unendliche Reihen. Sie sind folgende:

$$\left.\begin{aligned} x &= -4a + 2 \\ x &= \frac{3}{5} a^{-\frac{1}{2}} - \frac{21}{50} a^{-\frac{3}{2}} + \frac{9}{1000} a^{-\frac{5}{2}} - \frac{357}{10000} a^{-\frac{7}{2}} + \ldots \\ x &= -\frac{3}{5} a^{-\frac{1}{2}} + \frac{21}{50} a^{-\frac{3}{2}} - \frac{9}{1000} a^{-\frac{5}{2}} + \frac{357}{10000} a^{-\frac{7}{2}} - \ldots \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

2. Bestimmung der Werthe α, welche einer Unterbrechung der Stetigkeit entsprechen.

a. Bestimmung jener Werthe α, welchen ein negativer Exponent ξ_0 im Anfangsgliede der aufsteigenden Reihenentwickelung entspricht, oder mit anderen Worten, Bestimmung der einfachen Factoren $a-\alpha$ die im Nenner der Wurzeln erscheinen.

Man findet diese Werthe α durch Auflösung der Zahlengleichung:

$$50 a^2 + 20 a + 2 = 0,$$

indem man den Coëfficienten der höchsten Potenz von x, nämlich von x^4, der Nulle gleichsetzt. Sie liefert einen einzigen Werth:

$$\alpha = -\frac{1}{5}$$

und wir schliessen hieraus, dass nur für $a = a + \frac{1}{5}$ die Entwickelung mit einem Anfangsgliede beginnen könne, welches einen negativen Exponenten ξ_0 besitzt und dass für $a = -\frac{1}{5}$ eine oder mehrere Wurzeln einen unendlichen Werth bekommen, weil in ihnen ein Nenner $5a + 1$ erscheint. Übersetzt man dieses Ergebniss in die Sprache der analytischen Geometrie, so zeigt sich, dass diejenige ebene Curve, deren Gleichung eben die gegebene (2) ist, eine zur Ordinatenaxe parallele geradlinige Assymptote besitzt, gegeben durch die Gleichung:

$$5a + 1 = 0.$$

Gleichwie das Nullsetzen des Coëfficienten von x^4 den Nenner geliefert hat, ebenso findet man durch Nullsetzen des Coëfficienten von x^0 die Factoren, welche in den Wurzeln erscheinen. Löst man die Gleichung:

$$108\,a^4 - 234\,a^3 + 198\,a^2 - 90\,a + 18 = 0$$

auf, so findet man die Werthe:

$$\alpha = \frac{1}{2}\,,\ +1\,,\ \frac{1}{3}\left[1+\sqrt{-2}\right],\ \frac{1}{3}\left[1-\sqrt{-2}\right]$$

und folgert hieraus, dass in den Wurzeln die Factoren:

$$2\,a - 1\,,\ a - 1\,.\ 3\,a - 1 - \sqrt{-2}\,,\ 3\,a - 1 + \sqrt{-2}$$

zu gewissen Potenzen erhoben erscheinen werden.

Über die Art und Weise, wie diese Nenner und Factoren in den Wurzeln erscheinen, gibt die aufsteigende Reihenentwickelung Aufschluss. Diese Reihenentwickelung ist aber zu diesem Zwecke nicht vollständig durchzuführen, sondern es genügt dazu die Bestimmung des Anfangsgliedes.

Beginnen wir die Untersuchung des Nenners $5a + 1$ und suchen wir uns über dessen Erscheinen in den Wurzeln Aufschluss zu verschaffen. Wir werden hierzu die aufsteigende Entwickelung der Wurzeln nach Potenzen der Grösse $5a + 1$ einleitenund uns namentlich die Anfangsglieder dieser Entwickelungsreihen verschaffen. Man beginnt damit, die Gleichung nach der Grösse $a = 5a + 1$ zu ordnen, indem man die Substitution $a = \frac{1}{5}\,(a - 1)$ ausführt. Die umgestaltete Gleichung ist dann folgende:

$$1250a^2 \,.\, x^4 +$$
$$+ [-4450a^2 + 1400a^3 - 75a^4]\, x^3 +$$
$$+ [13500 - 2250a + 2660a^2 - 1880a^3 + 530a^4 - 60a^5]\, x^2 +$$
$$+ [-48060 + 23130a - 3330a^2 + 135a^3]\, x +$$
$$+ [28728 - 25092a + 9108a^2 - 1602a^3 + 108a^4] = 0.$$

Man sieht hieraus, dass die Coëfficienten der beiden höchsten Potenzen von x, nämlich der Coëfficient von x^4 und jener von x^3 den Factor a^2 besitzen, während alle übrigen keinen solchen aufweisen. Dies allein würde zur Bestimmung des Gesuchten hinreichen, und die hier vollständig durchgeführte Umstaltung der Gleichung ist im Grunde überflüssig. Beginnen wir mit der Bestimmung von ξ_0, so ist dazu ein System von geraden Linien zu betrachten. Sie sind folgende:

$$\eta = 2 + 4\xi$$
$$\eta = 2 + 3\xi$$
$$\eta = 2\xi$$
$$\eta = \xi$$
$$\eta = 0.$$

Sie begrenzen ein unterhalb liegendes Polygon, welches nur zwei Eckpunkte besitzt; diesen entsprechen die Abscissen $\xi_0 = -1$ und $\xi_0 = 0$.

Man schliesst daraus auf zwei Formen des Anfangsgliedes nämlich:

$$\frac{h_0}{a} = \frac{h_0}{5a+1} \text{ und } h_0.$$

Zur Bestimmung der Coëfficienten h_0 dienen folgende Gleichungen für $\xi = -1$

$$1250 h_0^4 + 13500 h_0^2 = 0$$

für $\xi = 0$

$$13500 h_0^2 - 48060 h_0 + 28728 = 0.$$

Die erste liefert die Wurzeln:

$$h_0 = +3\sqrt{-\frac{6}{5}} \text{ und } h_0 = -3\sqrt{-\frac{6}{5}}$$

und es folgen hieraus die beiden Anfangsglieder:

$$3\sqrt{-\frac{6}{5}}\,\frac{1}{a} \text{ und } -3\sqrt{-\frac{6}{5}}\,\frac{1}{a}.$$

Es sind also zwei Wurzeln mit dem Nenner $5a + 1$ versehen, während die beiden anderen keinen solchen besitzen. In diesem Beispiele, wo schon zwei Wurzeln in geschlossener Form aufgefunden sind, die (4) nämlich und die (5), unterliegt es keinem Zweifel, dass dieser Nenner in den beiden andern Wurzeln erscheint, welche bei der absteigenden Entwickelung als unendliche Reihen erhalten wurden. Die Kenntniss dieses Nenners verstattet einen wesentlichen Vortheil, denn man kann nunmehr die Wurzeln der Gleichung von diesem Nenner befreien, indem man durch die Substitution:

$$\frac{x}{5a+1} = y \quad \text{oder} \quad x = (5a + 1)\, y = \mathrm{a}y$$

die gegebene Gleichung in eine andere umstaltet, welche anstatt der früheren Unbekannten x die neue y enthält. Führt man diese Transformation aus, so gelangt man zu einer neuen Gleichung, zwischen a und y, und diese verstattet alle vier Wurzeln in geschlossener Form anzugeben, wenn man y aufsteigend nach der Grösse $a—1$ entwickelt. Man findet nämlich:

$$y = 3\sqrt{a-1}\,, \quad \text{und } y = -3\sqrt{a-1}.$$

Diesen beiden Wurzeln y entsprechen die Werthe:

$$x = \frac{3\sqrt{a-1}}{5a+1} \text{ und } x = \frac{-3\sqrt{a-1}}{5a+1}.$$

Man sieht an diesem Beispiele, wie die eingeleiteten Untersuchungen mitunter ohne grosse Schwierigkeit zu geschlossenen Formen führen können, obwohl dies durchaus nicht das eigentliche Ziel dieser Auflösungsmethode ist.

Es erübrigt noch eine letzte Untersuchung an einem Beispiele zu zeigen, nämlich:

b. Die Bestimmung derjenigen Werthe α, welche gewisse Irrationalgrössen in den Wurzeln erkennen lassen dadurch, dass die aufsteigende Entwickelung nach $\mathrm{a} = a-\alpha$ zu Folgegliedern führt, die gebrochene Exponenten ξ besitzen.

Wir wählen hiezu das einfache Beispiel:

$$x^3 + (3a—3)\, x^2 + (3a^2—6a + 3)\, x + a^3—3a^2 + 2a + 1 = 0.$$

Zur Ermittlung dieser Werthe α hat man zu dieser Gleichung noch jene hinzuzufügen, die durch einmaliges Differenziren nach x abgeleitet wird, nämlich die:

$$3x^2 + (6a—3)\, x + 3a^2—6a + 3 = 0.$$

Die Auflösung dieser zwei Gleichungen nach α liefert die verlangten Werthe α. Man findet nur einen einzigen solchen, nämlich $\alpha = 2$, und gewinnt dadurch die Überzeugung, dass nur für die nach $a = \alpha - 2$ geordnete aufsteigende Entwickelung Folgeglieder mit gebrochenen Exponenten auftreten können. Leitet man dieselbe wirklich ein, so findet man die drei Wurzeln:

$$x = -1 + a^{\frac{1}{3}} - a,$$

$$x = -1 + \frac{1}{2}\left[-1 + \sqrt{-3}\right] a^{\frac{1}{3}} - a$$

$$x = -1 + \frac{1}{2}\left[-1 - \sqrt{-3}\right] a^{\frac{1}{3}} - a$$

oder:

$$x = -\alpha + 1 + \sqrt[3]{\alpha - 2}.$$

Dieses Beispiel zeigt abermals, wie diese Auflösungsmethode in günstigen Fällen zu geschlossenen Formen der Wurzeln führen könne, obwohl es den Anschein hat, dass schon vom Anfange her auf solche Verzicht geleistet worden sei.

Zweites Problem: Auflösung eines Systems von zwei Gleichungen mit drei Buchstabengrössen x, y und α.

Die gegebenen Gleichungen werden vorausgesetzt in der Form:

$$P_1 = S_1[H\alpha^{\alpha} x^{\tau} y^{\vartheta}] = 0, \quad P_2 = S_2[H\alpha^{\alpha} x^{\tau} y^{\vartheta}] = 0.$$

Ihre ersten Theile sind Polynome, deren Glieder die allgemeine Form $H\,\alpha^{\alpha}\,x^{\tau}\,y^{\vartheta}$ besitzen. Es ist dies wohl nicht die allgemeinste Form einer algebraischen Gleichung mit drei Buchstabengrössen, allein durch das bekannte Herausschaffen der Nenner und Irrationalgrössen lässt sich jede algebraische Gleichung auf diese Form bringen.

Man pflegt gewöhnlich durch Elimination die Auflösung eines solchen Systems von Gleichungen zu bewerkstelligen. Da das Eliminationsverfahren hinlänglich bekannt ist und die Eliminationsgleichung eine Gleichung mit nur zwei Buchstabengrössen sein wird, so scheint es für den ersten Augenblick, dass die Auflösung dieses Problemes keiner weiteren Erörterung bedürfe. Allein eine nähere Betrachtung oder auch nur der blosse Versuch, zwei solche Gleichungen von einigermassen höherem Grade auf diese Weise aufzulösen, würde zeigen, dass die dazu erforderlichen Rechnungen wohl keinerlei analytischer Schwierigkeit unterliegen, aber ziemlich weitläufig sind, so zwar, dass man schon bei einigermassen höherem Grade auf die Auflösung verzichten müsste, wenn dazu die Elimination unentbehrlich wäre. Dieser Weg der Auflösung ist daher wohl theoretisch begründet, weil in allen Fällen eine Eliminationsgleichung besteht; allein dies beweist nur, dass alle Wurzeln der algebraischen Gleichungen und Systeme von solchen eine gemeinsame Eigenschaft besitzen, da es unter ihnen nicht eine einzige gibt, die nicht zugleich die Wurzel einer bestimmten algebraischen Gleichung wäre. Hieraus folgt keineswegs, dass die Elimination derjenige Weg sei, den man immer einschlagen müsse, um zur Kenntniss der Wurzeln zu gelangen. Dieser Weg wäre für nur einigermassen höhere Grade der Gleichungen viel zu ausgedehnt und würde weitläufige und genaue Untersuchungen erfordern, um sich zu versichern, dass man dabei keine neuen Wurzeln eingeführt habe, die den gegebenen Gleichungen fremd sind. Obwohl eine solche Entscheidung stets möglich ist, das Einführen von neuen Factoren bei der Elimination immer vermieden werden kann, so sind die Rechnungen so ausgedehnt, dass man auf die Auflösung verzichten müsste bei nur einigermassen höherem Grade der Gleichungen, wenn dies auf keine andere Weise möglich wäre als durch den Vorgang der Elimination.

In dieser Abhandlung ist dieses Problem von einem sehr differenten Standpunkte aus behandelt. Man belässt nämlich den Gleichungen ihre ursprüngliche Form und leitet aus ihnen unmittelbar die Auflösungen ab. Dieser Vorgang ist ähnlich demjenigen, der bei der Auflösung einer einzigen Gleichung angewendet wurde. Die Untersuchung zerfällt auch hier in drei Haupttheile:

1) in die absteigende Entwickelung von x und y nach Potenzen von a geordnet;

2) in die aufsteigende Entwickelung nach einer beliebigen Grösse $\mathrm{a} = a - \alpha$;

3) in die Bestimmung der unstetig machenden Werthe α.

1) Absteigende Entwickelung.

Man stellt sich dabei x und y vor in der Form:

$$x = h_0 a^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1} + h_2 a^{\xi_2} + \ldots.$$
$$y = k_0 a^{\eta_0} + k_1 a^{\eta_1} + k_2 a^{\eta_2} + \ldots.$$

wobei die Relationen:

$$\xi_0 > \xi_1 > \xi_2 > \dots .$$
$$\eta_0 > \eta_1 > \eta_2 > \dots .$$

bestehen. Man beginnt mit der Bestimmung der Anfangsglieder und zunächst mit der Ermittelung von ξ_0 und η_0. Diese Werthe gehen aus einem eigenthümlichen Verfahren hervor, welches sich durch eine geometrische Construction am deutlichsten darstellen lässt und in Folgendem besteht:

Man bilde einem jeden einzelnen Gliede

$$\Pi\, a^{\mathfrak{a}}\, x^{\mathfrak{x}}\, y^{\mathfrak{y}}$$

der Gleichungs-Polynome entsprechend eine Gleichung:

$$\zeta = \mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi + \mathfrak{y}\eta$$

und denke sich die dadurch bestimmten Ebenen im Raume von drei Dimensionen construirt, indem man ξ, η, und als Coordinaten eines Punktes betrachtet. Man erhält so zwei Systeme von Ebenen, welche den zwei Gleichungs-Polynomen P_1 und P_2 entsprechen.

Die Ebenen eines und desselben Systemes durchkreuzen sich gegenseitig und gewisse Theile derselben bilden die Begrenzung eines unendlichen Polyeders, welches oberhalb aller so verzeichneten Ebenen liegt. Diese Begrenzung ist wie bei allen Polyedern aus Flächen zusammengesetzt, die in Kanten und diese wieder sich in Eckpunkten schneiden. Man denke sich nun die Kanten und Ecken dieser Begrenzungsfläche auf die horizontale Ebene projicirt, so entspricht einer jeden Ecke ein Punkt, jeder Kante ein Stück einer geraden Linie als Projection und es erscheint dadurch die horizontale Projectionsebene in eine Anzahl von Polygonen zerstückelt. Die geraden Linien, welche diese Polygone von einander trennen, bilden ein Netz. Man denke sich nun diese horizontale Projection verzeichnet sowohl für P_1 als für P_2 und zwar auf einer und derselben Ebene, so werden diese Netze sich gegenseitig durchschneiden. Die Durchschnittspunkte entsprechen sowohl in dem einen als in dem andern Gleichungs-Polynome einer Kante des früher erwähnten Polyeders. Die diesen Durchschnittspunkten angehörigen Coordinaten ξ und η sind die verlangten Werthe ξ_0 und η_0. In der Regel erhält man mehrere solche Punkte, und auf diese Weise auch mehrere verschiedene Combinationen von Werthen ξ_0, η_0. Diese Punkte entstehen meistentheils durch einen Durchschnitt zweier geraden Linien der beiden Netze und sind vollkommen vereinzelt. Die dadurch angegebenen Werthe ξ_0 , η_0 sind dann vollkommen bestimmt und in endlicher Anzahl vorhanden. Bisweilen jedoch decken sich Linien vollkommen, und statt eines vereinzelten Punktes, der beiden Netzen gemeinschaftlich ist, treten gemeinschaftliche Linien von einer gewissen Ausdehnung auf. In einem solchen Ausnahmsfalle sind die Werthe ξ_0 , η_0 nicht vollkommen bestimmt, sondern nur eine einzige Relationsgleichung zwischen denselben bekannt. Diese Erscheinung kann entweder in der Anwesenheit eines gemeinschaftlichen Factors in beiden Gleichungen begründet sein, oder aber es genügt die hier betrachtete Bedingung zur Bestimmung der Anfangsglieder nicht. Man reicht dann mit dieser Untersuchung nicht aus, sondern muss noch die weiteren Bedingungen in Rechnung ziehen, und sich entweder von der Existenz eines gemeinschaftlichen Factors in beiden Gleichungen überzeugen, oder eine zweite Relationsgleichung für ξ_0 und η_0 aufsuchen, die in Verbindung mit der früheren zu ihrer Bestimmung dient. Ist die Bestimmung von ξ_0 und η_0 vollendet, so muss man zu jener von h_0 und k_0 schreiten. Diese Werthe gehen durch Auflösung eines Systems von zwei Zahlengleichungen hervor, deren Bildungsweise aus den beiden Netzen unmittelbar ersichtlich ist. In den Netzen repräsentiren nämlich die Polygone gewisse Glieder des Gleichungs-Polynoms, weil sie die Projection der Polyederflächen sind; auf ähnliche Weise bezeichnet eine Linie in dem Netze zwei oder auch gelegentlich mehrere Glieder des Gleichungs-Polynoms, weil sie die Projection einer Kante des Polyeders vorstellt, in der sich zwei oder auch mehrere Ebenen des betrachteten Systems von Ebenen schneiden. Man denke sich nun die Summe der durch den Punkt ξ_0, η_0 bezeichneten Glieder gebildet in dem einen und in dem anderen Gleichungs-Polynome. Sie seien:

$$\Sigma_1 \left[H\, a^{\mathfrak{a}}\ x^{\mathfrak{x}}\ y^{\mathfrak{y}}\right],\ \ \Sigma_2 \left[H\, a^{\mathfrak{a}}\ x^{\mathfrak{x}}\ y^{\mathfrak{y}}\right];$$

so substituirt man in dieselben $a = 1$, $x = h$, $y = k$ und setzt diese Ausdrücke gleich Null und erhält so die verlangten Bestimmungsgleichungen:

$$\Sigma_1 \left[H\, h^{\mathfrak{x}}\ k^{\mathfrak{y}}\right] = 0,\ \ \Sigma_2 \left[H\, h^{\mathfrak{x}}\ k^{\mathfrak{y}}\right] = 0.$$

Durch ihre Auflösung gewinnt man die zu ξ_0 und η_0 gehörigen Werthe von h_0 und k_0. Hiermit ist also in der Regel die Bestimmung der Anfangsglieder $h_0\, a^{\xi_0}$ und $k_0\, a^{\eta_0}$ beendigt. Man gelangt dazu ohne alle Elimination durch ein nicht sehr complicirtes und directes Verfahren. Es treten wohl gewisse Ausnahmsfälle ein, in denen die Bestimmung der Anfangsglieder minder einfach ist und noch eine weitere Untersuchung erfordert, allein man gelangt zuletzt doch immer zu einem ganz zweifellosen Aufschlusse über die Anfangsglieder.

Nach der Bestimmung der Anfangsglieder ist jene der Folgeglieder der nächste Schritt. Das hierzu einzuleitende Verfahren ist meistentheils sehr einfach, weil mit der Bestimmung der Anfangsglieder gewöhnlich auch die Isolirung der verschiedenen Auflösungen von einander erfolgt ist. Es gehört dann zu einer bestimmten Combination von Anfangsgliedern, für x und y nur je eine einzige Reihe von Folgegliedern, und man erhält sie durch Auflösung einer Reihe von Gleichungen des ersten Grades. Die dazu erforderlichen Rechnungs-Entwickelungen gestalten sich dann sehr einfach, denn man hat nur die bereits ermittelten Glieder von x und y in die beiden Gleichungs-Polynome zu substituiren und die Substitutions-Resultate absteigend zu ordnen und die höchsten Glieder derselben einer bestimmten Rechnungsoperation zu unterwerfen. Nur wenn zwei oder mehrere Auflösungen in den Anfangsgliedern übereinstimmen, treten an die Stelle der Gleichungen des ersten Grades solche vom höheren Grade und zwar so lange auf, bis durch eine hinreichende Anzahl von Anfangsgliedern die Trennung der Wurzeln erfolgt ist. Dieses Verfahren führt meistentheils zu unendlichen Reihen, unter gewissen Bedingungen jedoch zu geschlossenen Ausdrücken.

2. Aufsteigende Entwickelung von x und y nach einer beliebigen Grösse $a - \alpha = \mathrm{a}$.

Die aufsteigende Entwickelung von x und y nach Potenzen einer beliebigen Grösse $\mathrm{a} = a - \alpha$ wird auf eine ähnliche Weise bewerkstelligt, wie die absteigende. Man ordnet nämlich zuvörderst die Gleichungs-Polynome nach dieser Grösse α und bringt sie auf die Form:

$$S_1[H\, \mathrm{a}^{\alpha}\, x^{\mathrm{r}}\, y^{\mathfrak{y}}] = 0, \quad S_2[H\, \mathrm{a}^{\alpha}\, x^{\mathrm{r}}\, y^{\mathfrak{y}}] = 0.$$

Hierauf verzeichnet man auf die bereits bekannte Weise das System von Ebenen und bestimmt die von denselben begrenzten Polyeder, aber mit dem Unterschiede, dass die unterhalb der Ebenen gelegenen von Wichtigkeit sind anstatt der oberhalb liegenden. Im Weiteren ist das Verfahren dasselbe wie früher. Man projicirt nämlich jetzt die Begrenzung dieser beiden Polyeder auf die horizontale Ebene $\xi\eta$ und erhält die beiden Netze, sucht hierauf ihre gemeinschaftlichen Punkte und findet so die gesuchten Werthe ξ_0, η_0 der Anfangsglieder. Die zugehörigen Coëfficienten h_0 und k_0 ergeben sich auf gleiche Weise, wie bei der absteigenden Entwickelung durch Auflösung von zwei Zahlengleichungen, die mit geringer Mühe mit Hülfe der Netze gebildet werden. Auch die Bestimmung der Folgeglieder bietet nichts Neues. Man gelangt auf solche Weise zu aufsteigend geordneten Reihen für x und y, welche, der Natur der Sache nach, meistens die Form:

$$x = h_0 + h_1\, \mathrm{a} + h_2\, \mathrm{a}^2 + \ldots$$
$$y = k_0 + k_1\, \mathrm{a} + k_2\, \mathrm{a}^2 + \ldots$$

besitzen, und nur für specielle Werthe von α findet eine Abweichung von dieser Form Statt, indem Glieder erscheinen, welche negative oder gebrochene Exponenten besitzen. Die aufsteigende Entwickelung ist von sehr geringem Nutzen ausser eben für jene Ausnahmsfälle; denn selbst zur numerischen Berechnung der Werthe von x und y für ein bestimmtes a ist es weit gerathener die gegebenen Gleichungen hierzu zu benützen, als erst die aufsteigende Reihenentwickelung vorangehen zu lassen. Für die Ausnahmsfälle jedoch erweist sich die aufsteigende Reihenentwickelung als ein wirksames Mittel, um gewisse Eigenschaften der Genüge leistenden Functionen zu erforschen, weil sie zur Kenntniss aller Nenner, Factoren und Irrationalgrössen in denselben führt. Dazu muss jedoch eine Ermittelung aller jener Werthe von α vorangehen, welche einem solchen Ausnahmsfalle entsprechen, und es ist daher die folgende Untersuchung einzuleiten:

3. Bestimmung der Werthe α, welchen eine Unterbrechung der Stetigkeit entspricht.

Diese Werthe von α werden aus Zahlengleichungen und Systemen von solchen gezogen und es ist im Grunde nur die Aufstellung dieser Gleichungen die Aufgabe. Man gelangt zu denselben zunächst durch zwei getrennte Untersuchungen; die eine erörtert die Bedingungen, unter welchen die aufsteigende Reihenentwickelung von x oder von y oder von beiden mit einem negativen ξ_0 oder η_0 beginnt; die zweite aber gibt Aufschluss, in welchen Fällen in irgend einem Folgegliede ein gebrochener Werth von ξ oder η erscheinen kann.

Mit der Ermittelung dieser speciellen Werthe von α ist gleichfalls die Untersuchung beendigt, da die wichtigsten Eigenschaften der Genüge leistenden Functionen hiermit bekannt sind. Alle übrigen auf specielle Punkte der Curve von doppelter Krümmung bezüglichen Fragen lassen sich durch Auflösung von Zahlengleichungen beantworten und gehören daher nicht hierher. Bisweilen gelangt man auch hier zu geschlossenen Formen ohne besondere Schwierigkeit, weil die hier geführten Untersuchungen alle Nenner, Factoren und Irrationalgrössen aufdecken, die in den Auflösungen erscheinen, und man ist daher durch geeignete Transformationen im Stande ein Abbrechen der unendlichen Reihen zu erzielen. Die darauf bezüglichen Untersuchungen können jedoch auch zu sehr complicirten Rechnungen führen und es würde das Verfahren, wo möglich geschlossene Formen zu erzielen, einen eigenen Theil dieser Theorie bilden.